Данная серия методичек посвящается лучшему семинаристу по электроду<br>рассказчику баек<br>и программы мехмата и НМУ<br>стильно и модно одетому, всегда и везде<br>и улыбчивому, как Степаньянц и Страупе<br>дающему позитивное настроение на весь семинар… да не, на всю неделю

Этот семинарист, проверяя ответ студента: Ответ у вас квазиправильный, но в принципе неправильный…

На прошлом семинаре мы с вами разбирали излучение движущегося с ускорением заряда. Закон движения нам был задан, заряд двигала некая рука, а мы смотрели излучение от него на больших расстояниях.
Теперь, в восьмом семинаре, всё будет наоборот: руку убираем, кинетическая энергия заряда вследствие излучения будет падать, нас будет интересовать, по какому закону движения он теперь будет двигаться. Что он куда излучает, нас уже не интересует.
Во всех задачах этого семинара будем считать только электрическое дипольное излучение:

$$-\frac{dW}{dt} = P(t) = \frac{2\ddot{\bar{d}}^2}{3c^3}$$

Если частица нерелятивистская, то основный вклад будет именно от электрического дипольного излучения. Поэтому всё сказанное далее будет относиться к нерелятивистским частицам.

Во всех задачах этого семинара у нас будет один точечный момент, что нам позволяет расписать вторую производную дипольного момента как

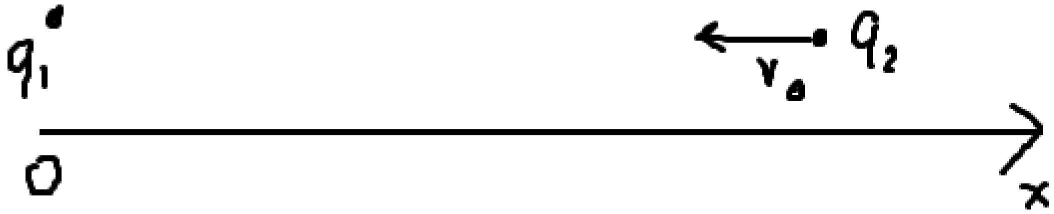
$$\ddot{\bar{d}} = (q\ddot{\bar{r}}) = q\ddot{\bar{r}} = q\bar{a}$$

Где **a** – ускорение. Подставляя q**a** вместо второй производной дипольного момента в формулу с $3c^3$ в знаменателе, получим

$$-\frac{dW(t)}{dt} = \frac{2q^2}{3c^3} a^2(t)$$

Таким образом, кинетическая энергия заряда будет уменьшаться со скоростью, прямо пропорциональной квадрату ускорения в данный момент. Это уравнение я назову законом мощности излучения.

Решим задачу 8.1:




Частица $q_2$ и массой m налетает из бесконечности со скоростью $v_0$ на закреплённую покоящуюся частицу $q_1$. Найти полную энергию, которую частица $q_2$ потратила на излучение.

Начинаем. Запишем закон мощности излучения:

$$\frac{2q_2^2}{3c^3} a_x^2(t) = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{mV_x^2(t)}{2} + \frac{q_1 q_2}{x(t)}\right)$$

И тут первая ловушка: велик соблазн забыть про потенциальную энергию, записав только кинетическую. Забывать про потенциальную энергию нельзя, мы получим неверный закон движения (как минимум, он не будет зависеть от $q_1$).

Дифференцируем по времени и кинетическую, и потенциальную энергию. Производная кинетической энергии будет

$$mV_x(t)a_x(t)$$

Потенциальной

$$-\frac{\dot{x}(t)}{x^2(t)} q_1 q_2$$

Подставляем:

$$\frac{2q_2^2}{3c^3} a_x^2(t) = mV_x(t)a_x(t) - \frac{\dot{x}(t)}{x^2(t)} q_1 q_2$$

Вообще это дифур второго порядка относительно координаты:

$$\frac{2q^2}{3c^3}\ddot{x} = m\dot{x}\ddot{x} - \frac{\dot{x}}{x^2}q_1q_2$$

Здесь заканчивается электрод и начинается курс дифуров. Поделим на ускорение:

$$\frac{2q^2}{3c^3} = m\dot{x} - \frac{\dot{x}q_1q_2}{\ddot{x}x^2}$$

Дифур автономный => можно понизить порядок уравнения.

$$\ddot{x} = vv_x$$

тогда

$$\frac{2q^2}{3c^3} = mv - \frac{q_1q_2}{xv_x}$$

Но как решать дифур дальше, я не знаю. Мы ещё поговорим про задачу 8.1 ближе к концу методички.

Решим задачу 8.3. Заряд q движется в однородном поле **H**, начальная скорость $\mathbf{v_0}$. От нас хотят закон движения и зависимость мощности от времени.
Потенциальную энергию в магнитном поле мы ввести не можем, нам надо как-то оперировать с силой Лоренца.

$$-\frac{dW(t)}{dt} = \frac{2q^2}{3c^3}a(t)$$

Чувствуете проблему? Тут энергия, а у нас сила. Нам бы перевести закон мощности излучения на язык сил, тогда мы сможем записать 2 закон Ньютона и получить дифур.
Мы естественным путём подошли к понятию ***силы радиационного трения***.
Радиационного – потому что на буржуйском radiation – это излучение, а трение – потому что это сила диссипативна и жрёт энергию, как и обычное механическое трение.
Формулу в студию! Википедия подсказывает:

$$\vec{F} = \frac{2}{3}\frac{q^2}{c^3}\frac{d\vec{a}}{dt},$$

Она содержит производную от ускорения, т.е. третью производную координаты по времени. Это достаточно редкий случай, когда она всплывает. Тогда 2 закон Ньютона для данной задачи запишется как

$$\frac{2}{3}\frac{q^2}{c^3}\frac{d\bar{a}}{dt}+\frac{q}{c}[\bar{v}\times\bar{H}]=m\bar{a}$$

Теперь это всё надо расписывать по проекциям. Пусть ось z параллельна **H**. Сила Лоренца всегда направлена перпендикулярна **H** и не создаст ускорения на ось z. А раз ускорения там и нет причин ему вдруг возникнут, то и проекция силы радиационного трения на ось **z** будет 0. Итак, скорость $v_z$ будет постоянна.
Исследуем $v_x$ и $v_y$. Распишем векторное произведение (выберем именно декартову СК, потому что там мы легко сможем вычислить векторное произведение):

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ V_x & V_y & V_z \\ 0 & 0 & H \end{vmatrix} = \bar{e}_x H v_y - \bar{e}_y H v_x$$

И запишем 2 закон Ньютона в проекции на ось X и Y:

$$\begin{cases} \frac{2q^2}{3c^3}\ddot{v}_x+\frac{q}{c}Hv_y=m\dot{v}_x \\ \frac{2q^2}{3c^3}\ddot{v}_y-\frac{q}{c}Hv_x=m\dot{v}_y \end{cases}$$

Это однородная система линейных дифуров с постоянными коэфами. Кравцов Андрей Владимирович (семинарист автора методички, отличный преподаватель) учил такие решать!
Сразу предостережу от «давайте подсчитаем определитесь матрицы и получаем характеристическое уравнение относительно λ». Если вы присмотритесь, у вас матрица 3x2. Схема с определителем работала для систем дифуров первого порядка. Тут – второго.
Один из способов:
$v_x$=Aexp(ft)

$v_y = C\exp(ft)$

Если мы это подставим в систему и поделим на exp(ft), то получим

$$\begin{cases} A\left(\frac{2q^2}{3c^3}f^2 - mf\right) + \frac{qH}{c}C = 0 \\ -\frac{qH}{c}A + \left(\frac{2q^2}{3c^3}f^2 - mf\right)C = 0 \end{cases}$$

Чтобы было нетривиальное, потребуем равенства нулю определителя

$$\left(\frac{2q^2}{3c^3}f^2 - mf\right)^2 + \left(\frac{qH}{c}\right)^2 = 0$$

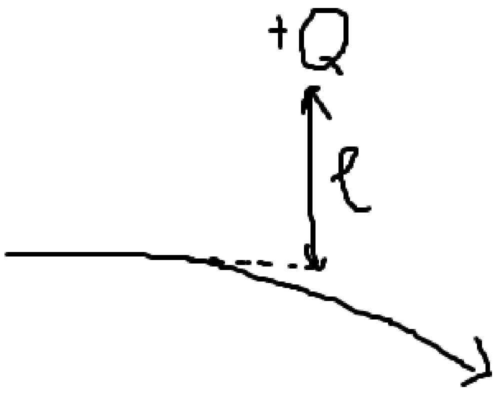
Уже попахивает комплексностью. И это не дано нас удивлять, ведь проекции скоростей должны осциллировать.

Получаем квадратное уравнение

$$\frac{2q^2}{3c^3}f^2 - mf \pm i\frac{qH}{c} = 0$$

Оттуда находим частоту. Она комплексная будет. Мнимая часть понятно, это осцилляции, всё-таки частица будет по квазивинтовой линии двигаться. Действительная часть… нужно будет выбрать такой корень, где она отрицательна, чтобы скорость со временем падала. Мы же ждём винтовую линию с уменьшающимся радиусом и уменьшающейся скоростью:

Задача 8.2.
Заряд q пролетает мимо заряда Q с начальной скоростью v. Прицельное расстояние *l*.
Вообще она летит не по прямой. В зависимости от знаков заряд q может отклониться как в сторону к потенциальному центру, так и от него.


Но у нас в условии написано, что $mv^2/2 \gg qQ/l$. Т.е. заряд имеет настолько большую кинетическую энергию и настолько большой импульс, что он почти

не чувствует влияния заряда и заряд летит по прямой. И более, того летит равномерно.
С этим приближением решение задачи существенно упрощается (более того, без него она, думаю, аналитически не решается вовсе). В этом случае закон движения будет
x=vt
y=*l*
z=0

$$z^2(t)=(vt)^2+l^2$$

$$\Delta W=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2q^2a^2(t)dt}{3c^3}$$

Выносим константу за интеграл, расписываем ускорение через второй закон Ньютона:

$$\Delta W=\frac{2q^2}{3c^3}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{F_{кулона}(t)}{m}\right)^2$$

И вот тут ещё одно приближение: мы пренебрегаем силой, вызванным радиационным трением, оставляя только силу Кулона. Иначе мы не решим задачу аналитически.

Расписываем силу Кулона в каждый момент времени:

$$\Delta W=\frac{2q^2}{3c^3}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{qQ}{mz^2(t)}\right)^2dt=$$

$$=\frac{2q^4Q^2}{3m^2c^3}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{z^4(t)}$$

И вот тут уже делаем наше приближение

$$z^2(t) = (vt)^2 + l^2$$

Получаем

$$\Delta W = \frac{2q^4Q^2}{3m^2c^3}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{((vt)^2+l^2)^2} = \frac{2q^4Q^2}{3m^2c^3v}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dvt}{((vt)+l^2)^2} = \frac{2q^4Q^2}{3m^2c^3v}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{(u^2+l^2)^2}$$

Основная сложность во взятии интеграла. Он точно есть в МАВЗе, а значит, можно взять первокура и попросить его вычислить.
Он будет равен

$$\frac{\pi}{2l^3}$$

Тогда ответ:

$$\Delta W = \frac{\pi q^4 Q^2}{3m^2c^3vl^3}$$

Как мы видим, мы решили задачу 8.2, и было это не слишком сложно, но мы сделали два приближения. И если первое вызвано непосредственно условием (то, что $mv^2/2 >> qQ/l$ => заряд равномерно летит по прямой), то второе – пренебрежение силы радиационного трения – заслуживает комментария. Назовём его шишанинским.
Алгоритм решения задач с шишанинским приближением:
1) Записываем 2 закон Ньютона для заряда БЕЗ учёта радиационного трения
2) Получаем закон движения
3) Мы знаем закон движения, он задан, по нему находим мощность излучения как квадрат ускорения на постоянный коэффициент $2q^2/3c^3$.
Т.е. мы считаем, что излучение НЕ вносит изменений в закон движения заряда. В принципе, если мы вспомним формулу для радиационного трения, там $c^3$ в знаменателе. Что же, ***иногда*** это оправдано.

А как понять, можем ли мы пользоваться шишанским приближением? Насколько я знаю, семинаристы им пользуются всегда на 8 семинаре во всех задачах. И 8.1 и 8.3, которые я решал без приближения, они решают с ним. На мой взгляд, в 8.3 это полностью недопустимо: в условии сказано «найти время, в течение которого кинетическая энергия уменьшится в 10 раз». Если мы найдём закон движения без радиационного трения, кинетическая энергия вообще не будет меняться! Но Шишанин (да и Соколов – на ВВХ выложены его семинары, посмотрите страницы 54 и 55, там эта задача разбирается) занимаются каким-то подгоном и какой-то ответ получают.

В задаче 8.1, напомню, без приближения мы получили нерешаемый дифур. Посмотрим, что нам даст шишанинское приближение – оно должно упростить задачу. Там оно, в отличие от 8.3, в целом оправдано.
2 закон Ньютона:

$$ma_x = \frac{kq_1q_2}{x^2}$$

А это дифур второго порядка

$$x^2(t)\ddot{x}(t) = \frac{kq_1q_2}{m}$$

Это автономный дифур второго порядка. Сведём его к неавтономному дифуру первого порядка, сделав замену p=dx/dt. Тогда

$$\ddot{x} = \dot{p} = \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = p_x \cdot p$$

И

$$x^2 p p_x = \frac{q_1q_2}{m}$$

$$x^2 p \frac{dp}{dx} = \frac{q_1q_2}{m}$$

$$\frac{1}{2}dp^2 = \frac{q_1q_2}{m}\cdot\frac{dx}{x^2}$$

$$dp^2 = \frac{-2q_1q_2}{m}d\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$p^2 = -\frac{2q_1q_2}{m}\left(\frac{1}{x}\right) + C_1^2$$

Константу C1 определяем, зная начальную скорость.

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{C_1^2 - \frac{2q_1q_2}{m}\left(\frac{1}{x}\right)}$$

Подставим сюда x равным плюс бесконечность. В левой части – проекция скорости, т.е. $-v_0$. Значит, у нас а) перед радикалом знак минус б) $C1 = v_0$, т.к. вычитаемое занулится.

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{v_0^2 - \frac{2q_1q_2}{m}\left(\frac{1}{x}\right)}$$

Мы можем записать закон движения в квадратурах:

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{\quad}}; \quad dt = -\frac{dx}{\sqrt{\quad}}$$

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x} -\frac{dx'}{\sqrt{v_0^2 - \frac{2q_1q_2}{m}\left(\frac{1}{x'}\right)}}$$

Ну а там находим x(t), v(t), a(t) и излучение.

В заключение замечу, что сила радиационного трения, кстати, тоже приближение. Более точным законом является

$$-\frac{dW(t)}{dt} = \frac{2q^2}{3c^3}a^2(t)$$

Силу радиационного трения можно использовать тогда и только тогда, когда на заряд действует другая сила, по модулю много больше, чем сила радиационного трения.

Иллюстрация, что будет, если этим правилом пренебречь. Представим себе заряд в свободном поле. На него не действует никакие силы, кроме силы радиационного трения. Пишем второй закон Ньютона:

$$m\bar{a} = \frac{2q^2\dot{\bar{a}}}{3c^3}$$

Перепишем как

$$\dot{\bar{a}}(t) = \frac{3c^3 m}{2q^2}\bar{a}(t)$$

Это хорошо знакомый дифур. Его решение

$$\bar{a}(t) = a_0 \exp\left[\frac{3c^3 m}{2q^2} t\right]$$

При $a_0$=0 получаем равномерное движение **r**=**r₀**+**v**t.

Если у частицы изначально не было какого-то ускорения, то $a_0$=0, и частица будет двигаться равнолинейно и прямолинейного. А теперь представим, что изначально ускорение было. Например, частица двигалась между пластинами конденсатора, где есть поле, но оно быстро убывает, когда мы выйдем за пределы конденсатора, и там его можно считать практически нулевым.
Или частица двигалась в том же конденсаторе, но мы закоротили пластины, после чего они быстро разрядились, поле пропало, ускорение пропало. В общем, у нас есть способы быстро ликвидировать начальное ускорение частицы.
Получаем, что после этого частица начнёт резко ускоряться. Причём по экспоненте. ЧЁЁЁЁЁЁЁ

Избежать этого можно, только сказав, чтобы на частицу действовала другая сила, по модулю больше, чем радиационное трение. Тогда сила радиацинного трения будет работать корректно и без багов.